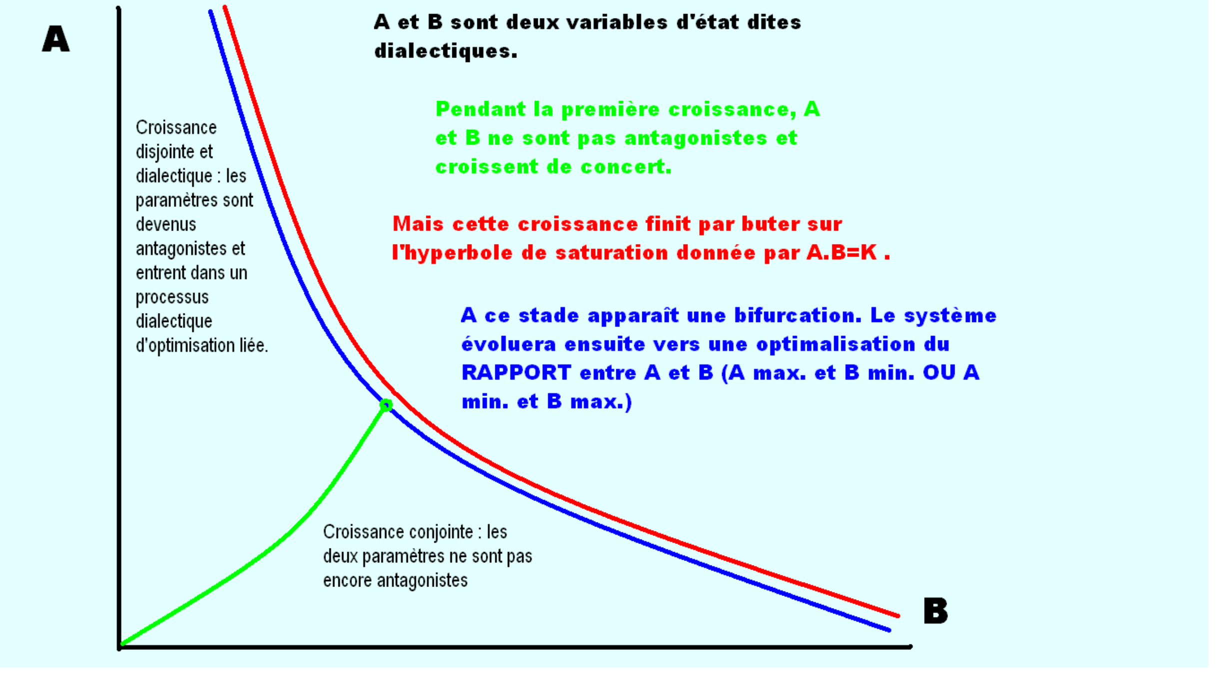
Le Cérizot, le 01 Avril 2007

<u>Note sur les variables d'état antagoniques</u>

Marc Halévy - van Keymeulen

Bien des systèmes sont soumis à un ensemble de deux ou plusieurs variables d'état antagoniques qui sont des variables dont les évolutions sont corrélées entre elles, mais dont la corrélation, selon l'évolution de telle ou telle variable d'ajustement, peut passer de la conjonction à la disjonction.

Un exemple de base est exprimé dans le schéma ci-dessous.



Au fil de la montée en complexité (qui est ici la variable d'évolution du système dans l'espace des phases), le système caractérisé par les deux variables d'état A et B, croît selon la courbe verte qui exprime que A et B croissent conjointement.
En venant butter sur l'hyperbole de saturation A.B=K qui marque une limite à cette conjonction, le système connaît une bifurcation et doit choisir : soit "descendre vers les B supérieur en sacrifiant partiellement A, soit "monter" vers les A supérieurs en laissant diminuer B.

On peut lire ce même schéma dans le langage de la physique des attracteurs en disant que le système est au départ attiré par un attracteur situé à l'infini sur A = µB jusqu'à arriver à son point de bifurcation où deux attracteurs plus puissants s'imposent, l'un sur A=0 et l'autre sur B=0.

Le paramètre K exprime que le produit des deux variables d'état ne peut excéder une certaine valeur limite, imposée par la nature même du système.

La trajectoire du point (A,B) dans l'espace des phases se déploiera en fonction de l'évolution du niveau de complexité globale du système étudié (cette complexité globale du système est une fonction du temps).
Cette trajectoire traduit la vocation du système qui est d'optimiser F, une fonctionnelle des variables d'état A et B.
F définit et mesure l'efficience globale du système.

Par exemple, pour un arbre, l'efficience se définit comme le rapport entre P, le poids total de bois, et S, la surface de captation lumineuse. On a alors F=P/S et l'optimalité est obtenue lorsque $\delta F=0$.
Pour un niveau de complexité $\kappa(t)$ donné, la solution de cette équation fonctionnelle donne la position du point (P,S) dans l'espace de phase de l'univers des arbres.
Mais étant donné la capacité métabolique de l'arbre et la capacité énergétique de son milieu, le produit PxS a une limite supérieure qui correspond au maximum d'énergie à la fois disponible dans le milieu ET métabolisable par l'arbre. Ce produit traduit l'idée que chaque unité d'énergie doit être investie dans la fabrication de bois OU dans l'expansion de l'interface photosynthétique.

En toute généralité, le problème posé est celui de l'évolution d'un système, en fonction de sa complexité - elle-même fonction de son activité-, qui est soumis, à la fois, à une "exigence d'efficience optimale" et à une "contrainte de finitude" dont l'origine est pour une part, intrinsèque (capacité métabolique finie) et pour une part extrinsèque (ressources disponibles finies). Il s'agit donc d'un calcul d'optimum contraint.

Cela ressemble fort à une généralisation de l'équation logistique de Verhulst qui décrit des systèmes à une seule variable d'état (la population) en fonction d'une contrainte intrinsèque (le taux "r" de fécondité nette) et d'une contrainte extrinsèque (la capacité "K" du territoire).